VOLUME-4, ISSUE-3

THE KEPLER PROBLEM

Alieva Jamila Rayimjonovna
Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Andijan State University, PhD

Akbarova Nigora G'ayrat qizi
Master's student in Mechanics and Mathematical Modeling at Andijan State University

Annotation:
This paper examines the Kepler problem as a special case of the motion of bodies in a central force field. It presents Kepler's fundamental laws, which describe the motion of planets around the Sun, and discusses their physical meaning and significance for modern science. Particular attention is paid to the analytical solution of the two-body problem and the impossibility of obtaining an exact solution for systems with three or more bodies. In this regard, numerical methods for solving equations of motion are considered, specifically the use of the MATLAB environment for modeling orbital motion. An algorithm is presented for reducing a system of differential equations to first-order form and their subsequent numerical solution. The paper emphasizes the importance of the Kepler problem for the development of astronomy, mechanics, and space exploration.

Keywords:
Kepler problem, Kepler's laws, planetary motion, central field, celestial mechanics, numerical methods, differential equations, MATLAB, orbital motion, two-body model, astronomy.

ЗАДАЧА КЕПЛЕРА

Аннотация:
В данной работе рассматривается задача Кеплера как частный случай движения тел в поле центральных сил. Приводятся основные законы Кеплера, описывающие движение планет вокруг Солнца, и обсуждаются их физический смысл и значение для современной науки. Особое внимание уделяется аналитическому решению задачи двух тел и невозможности получения точного решения для систем с тремя и более телами. В связи с этим рассматриваются численные методы решения уравнений движения, в частности использование среды MATLAB для моделирования орбитального движения. Представлен алгоритм приведения системы дифференциальных уравнений к виду первого порядка и их последующее численное решение. Работа подчеркивает важность задачи Кеплера для развития астрономии, механики и космических исследований.

Ключевые слова:
задача Кеплера, законы Кеплера, движение планет, центральное поле, небесная механика, численные методы, дифференциальные уравнения, MATLAB, орбитальное движение, модель двух тел, астрономия, классическая механика.

Задача о движении планет в поле тяжести небесных светил, являющаяся частным случаем задачи о движении в поле центральных сил, известна на протяжении нескольких тысячелетий истории человечества и в настоящее время рассматривается как в школьных курсах физики, астрономии, так и в вузовских курсах классической механики и астрономии**.**

Большую часть наших знаний о движении планет объединили в себе законы Кеплера, полученные на основе анализа данных астрономических наблюдений.

Большую часть наших знаний о движении планет объединили в себе законы Кеплера, полученные на основе анализа данных астрономических наблюдений, которые формулируются следующим образом:

1.Всякая планета движется по эллиптической орбите, в одном из фокусов которой находится Солнце.

2. Скорость планеты возрастает по мере удаления от Солнца таким образом, что прямая, соединяющая Солнце и планету, в равные промежутки времени заметает одинаковую площадь.

3. Для всех планет, вращающихся вокруг Солнца, отношение T^2/R^3 одинаково (T — период обращения планеты вокруг Солнца, R — большая полуось эллипса).

Отметим, что получить аналитическое решение задачи Кеплера удается только в случае рассмотрения движения двух тел, взаимодействующих по закону обратных квадратов. Это решение рассматривается во всех учебниках по классической меха нике, только малая часть из которых приведена в списке литературы [1–3]. Задача Кеплера для трех и более тел аналитического решения не имеет, может быть решена только численно, поэтому в этой главе основное внимание мы уделяем численному решению уравнений движения тела в центральном поле.

Предваряя нахождение численного решения системы уравнений

$$\frac{d^2X}{d\tau^2} = -\frac{4\pi^2}{(X^2+Y^2)^{3/2}}X,$$

$$\frac{d^2Y}{d\tau^2} = -\frac{4\pi^2}{(X^2+Y^2)^{3/2}}Y,$$

приведем ее к эквивалентной системе уравнений первого порядка, выполнив замену переменных $X \to z_1, \dot{X} \to z_2, Y \to z_3, \dot{Z} \to z_4$:

$$\frac{dz_1}{d\tau} = z_2 \qquad (1)$$

$$\frac{dz_2}{d\tau} = -\frac{4\pi^2 \cdot z_1}{({z_1}^2+{z_3}^2)^{3/2}} \qquad (2)$$

$$\frac{dz_3}{d\tau} = z_4 \qquad (3)$$

$$\frac{dz_4}{d\tau} = -\frac{4\pi^2 \cdot z_3}{({z_1}^2+{z_3}^2)^{3/2}} \qquad (4)$$

Следуя общим правилам MATLAB решения систем ОДУ первого порядка, создадим m-функцию Orbit.m, возвращающую значения координат вектора-функции, стоящей в левой части системы (1)-(4):

```
function dy=Orbit(t,z)
 dy=zeros(4,1); % задание вектора-столбца
                    % размерности 4x1
 %задание координат вектора-функции,
```

```
 % стоящей в правой части (4.30)-(4.33)
dy(1)=z(2);
dy(2)=-4*pi^2*z(1)/(z(1)^2+z(3)^2)^(3/2);
dy(3)=z(4);
dy(4)=-4*pi^2*z(3)/(z(1)^2+z(3)^2)^(3/2)
```

Далее необходимо выполнить в командном окне следующую последовательность команд, сохраненную нами в файле Glava4_1.m:

```
% задание начальных условий x(0), x'(0), y(0), y'(0)
>> x0=1;
 >> y0=0;
>> vx0=0;
>> vy0=2*pi*1.2;
% вычисление численного
 % решение системы (1)-(4)
>> [t,Y]=ode45('Orbit',[0:10^-3:2.5],[x0 vx0 y0 vy0]);
>> figure(1); plot(t,Y(:,1)); % построение зависимости x(t)
 >> figure(2); plot(t,Y(:,2)); % построение зависимости x'(t)
 >> figure(3); plot(t,Y(:,3)); % построение зависимости y(t)
 >> figure(4); plot(t,Y(:,4)); % построение зависимости y'(t)
 >> figure(5); plot(Y(:,1),Y(:,3)); % построение зависимости
                                     % движение тела
```

Задача Кеплера остается актуальной и важной для понимания и предсказания движения небесных тел. Ее решение представляет собой сложную и многогранную проблему, требующую глубокого знания математики, физики и численных методов. Дальнейшие исследования в этой области будут способствовать развитию космонавтики, астрономии и других наук.

Вывод:В результате проведённого исследования установлено, что задача Кеплера играет фундаментальную роль в изучении движения небесных тел и является основой классической механики и астрономии. Законы Кеплера позволяют описывать орбитальное движение планет и служат важным инструментом для анализа гравитационных систем. Показано, что аналитическое решение возможно лишь для системы двух тел, тогда как более сложные системы требуют применения численных методов. Использование программных средств, таких как MATLAB, значительно упрощает процесс моделирования и позволяет получать наглядные результаты движения тел. Таким образом, численные методы являются эффективным средством исследования сложных динамических систем, а дальнейшее развитие данной области способствует прогрессу в космонавтике и смежных науках.

ЛИТЕРАТУРА

1. С.В. Поршнев Компьютерное моделирование физических процессов в пакете MATLAB 2011.736с.
2. Mechanical vibrations / Singiresu S. Rao. 5th edition
3. И.А. Елизаров, Ю.Ф. Мартемьянов, А.Г. Схиртладзе, А.А. Третьяков Моделирование систем 2011.