

## ГРАФИКО-ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНЫ

Абдикаримов Р.А., Ходжаев Д.А., Вафаев Б.М., Муродиллаев Ф.Ш.

**Аннотация:** Ушбу ишда шарнирли таянчларга эга бўлган тўғри тўртбурчакли изотроп пластинанинг эркин тебраниши масаласининг тўлиқ аналитик ечими келтирилган. Классик Кирхгоф-Ляв пластиналар назарияси асосида ҳаракат тенгламаси чиқарилган ва ўз-ўзидан тебраниш частоталари ва тебраниш шакллари учун ўзгарувчиларни ажратиш усулидан фойдаланган ҳолда аниқ ифодалар олинган. Квадрат пўлат пластина ( $a = b = 1$  м,  $h = 0.01$  м) учун биринчи ўз-ўзидан тебраниш частотаси ҳисоблаб чиқилган ( $\omega_{11} \approx 95.7$  рад/с,  $f_{11} \approx 15.2$  Гц) ва мос келувчи мода шакли қурилган. Ечим мақолада таклиф қилинган тебранишларнинг ўз-ўзидан тебраниш частоталарини график-сонли аниқлаш усули билан верификация қилинган. Биринчи ўз-ўзидан тебраниш частотасининг сонли қийматларидаги фарқ 2% дан кам бўлган. Геометрик параметрлар ва материалнинг механик хусусиятларининг динамик реакцияга таъсирини таҳлил қилишга алоҳида эътибор қаратилган. Олинган натижалар авиация, кemasозлик ва иқтисодиётнинг бошқа тармоқларидаги конструкцияларни лойиҳалашда ишлатилиши мумкин.

Калит сўзлар: изотроп пластина, шарнирли маҳкамлаш, ўз-ўзидан тебраниш частоталари, ўзгарувчиларни ажратиш усули, аналитик ечим.

**Аннотация:** В работе представлено полное аналитическое решение задачи о свободных колебаниях прямоугольной изотропной пластины с шарнирно опертыми краями. На основе классической теории пластин Кирхгофа-Лява выведено уравнение движения и получены точные выражения для собственных частот и форм колебаний с использованием метода разделения переменных. Для квадратной стальной пластины ( $a = b = 1$  м,  $h = 0.01$  м) рассчитана первая собственная частота ( $\omega_{11} \approx 95.7$  рад/с,  $f_{11} \approx 15.2$  Гц) и построена соответствующая форма моды. Решение верифицировано предлагаемым в статье методом графико-численного определения собственных частот колебаний. Расхождение в численных значениях в первой собственной частоте оказалось менее 2%. Особое внимание уделено анализу влияния геометрических параметров и механических свойств материала на динамический отклик. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании конструкций в авиационной, судостроительной и в других отраслях экономики.

**Ключевые слова:** изотропная пластина, шарнирное закрепление, собственные частоты, метод разделения переменных, аналитическое решение

**Abstract:** This paper presents the complete analytical solution to the problem of free vibrations of a rectangular isotropic plate with simply supported edges. Based on the classical Kirchhoff-Love plate theory, the equation of motion is derived, and exact expressions for the natural frequencies and vibration mode shapes are obtained using the method of separation of variables. The first natural frequency ( $\omega_{11} \approx 95.7$  rad/s,  $f_{11} \approx 15.2$  Hz) is calculated for a square steel plate ( $a = b = 1$  m,  $h = 0.01$  m), and the corresponding mode shape is constructed. The solution is verified by the graphical-numerical method for determining natural vibration frequencies proposed in the article. The discrepancy in the numerical values of the first natural frequency was found to be less than 2%. Special attention is paid to analyzing the influence of geometric parameters and the

material's mechanical properties on the dynamic response. The results obtained can be used in designing structures in aerospace, shipbuilding, and other sectors of the economy.

Keywords: isotropic plate, simply supported edges, natural frequencies, method of separation of variables, analytical solution.

**1. Введение (Introduction).** Колебания пластин являются ключевой проблемой в динамике конструкций. Прямоугольные пластины с шарнирным закреплением краёв представляют собой классическую модель, используемую в аэрокосмической инженерии и строительстве. Несмотря на кажущуюся простоту, точное определение их собственных частот требует строгого математического аппарата.

Проведение точного анализа колебательных процессов позволяет предотвратить резонансные явления, снизить усталостные нагрузки и существенно повысить надежность конструкций. Особое значение этот вопрос приобретает в авиационно-космической технике, строительстве и в других отраслях экономики.

Анализ колебаний пластин в современных инженерных конструкциях имеет огромное значение. В авиационной и космической отрасли пластинчатые конструкции широко применяются в элементах обшивки крыльев, фюзеляжа и шасси. Основные проблемы связаны с вибрациями, возникающими от работы двигателей, аэродинамических сил и турбулентности, которые могут привести к серьезным последствиям: усталостным разрушениям крепежных элементов, флаттеру (динамической неустойчивости крыла) и повышенному шуму в салоне. Для решения этих задач применяется комплекс мер: точный расчет собственных частот композитных обшивок ( $\omega_{11}$ ) с целью исключения совпадения с частотами работы силовых установок (50-200 Гц), добавление ребер жесткости для повышения низших частот ( $\omega_{11}$ ) и использование специальных демпфирующих покрытий. В строительстве и гражданской инженерии пластинчатые конструкции (перекрытия, мостовые полотна, фасадные системы) подвергаются воздействию ветровых и сейсмических нагрузок, а также резонансным явлениям от движения людей и техники. Для обеспечения надежности применяются следующие решения: оптимизация толщины бетонных плит перекрытий (поддержание  $\omega_{11} > 5$  Гц, что превышает частоту шага человека 1-3 Гц), динамический анализ мостовых пролетов с учетом колебательных характеристик от транспортных потоков и использование упругих креплений для фасадных панелей.

Для инженеров-практиков можно сформулировать ключевые выводы: в авиации контроль частотных характеристик является основой безопасности и требует учета аэродинамических факторов и сложных граничных условий; в строительстве критически важно избегать совпадений собственных частот с эксплуатационными нагрузками, применяя методы упрочнения (ребра жесткости).

Отметим, что перспективными направлениями развития являются: использование метаматериалов для управления частотными характеристиками; применение искусственного интеллекта для оптимизации форм пластин.

Теорию пластин посвящены достаточно большое количество книг в виде монографии, учебников. В них нашли достаточного отражения основы теории пластин, вариационные методы, энергетические принципы, классические методы решения задач устойчивости и колебания, а также методы, основанные на конечных элементах [1-7]. Здесь мы приводим некоторые из них. Например, в пункте «Прямоугольные пластины» книги [2-Тимошенко С.П.] представлено аналитическое исследование поперечных колебаний прямоугольных

пластин с акцентом на уточнение расчётных моделей для свободно опертых краёв. Научная новизна работы заключается в систематизации энергетического подхода к определению собственных частот колебаний; в разработке модифицированной методики применения метода Релея-Ритца для пластин с комбинированными граничными условиями; верификации теоретических выкладок через сопоставление с классическими решениями Кирхгофа. Полученные результаты позволяют точнее прогнозировать вибрационное поведение пластинчатых элементов в строительных конструкциях, авиа- и машиностроении. Особое внимание уделено случаям, когда традиционные аналитические методы дают значительную погрешность.

Далее приводятся работы, где рассмотрены, в основном, колебания прямоугольных пластин, у которой все стороны шарнирно-оперты. В них найдены собственные частоты или же параметр частоты.

Работа [9-Ganesh Naik Guguloth, Baij Nath Singh, Vinayak Ranjan] посвящена исследованию методом конечных элементов (МКЭ) колебаний прямоугольной пластин. Определены первые шесть характерных собственных частот свободных колебаний и соответствующие форм колебаний для пластин, у которой все стороны шарнирно-оперты.

В работе [10-Ramu-2] используется точное решение типа Леви для определения собственных частот шарнирно опертой прямоугольной пластины применительно к теории пластин Кирхгофа в рамках метода конечных элементов (МКЭ). Определяются матрицы жёсткости и массы, которые затем используются для расчёта собственных частот через решение задачи на собственные значения. Численные результаты показали, что метод применим для анализа свободных колебаний тонких прямоугольных пластин. Однако при увеличении толщины пластины погрешность в параметрах частот увеличивается. Точные решения (Леви) хорошо работают для тонких пластин.

В работе [11-Nkounhawa, P.K., Ndapeu, D., Kenmeugne, V. and Began,] изучены динамические поведения конструкций, подверженных свободным колебаниям, проводится с помощью модального анализа для расчета собственных частот и модальных деформаций. В этой статье представлен модальный анализ тонкой прямоугольной шарнирно опертой пластины. Аналитическое решение дифференциального уравнения получается путем применения метода разделения переменных. Результаты, полученные МКЭ с помощью Ansys сравниваются с результатами, полученными аналитическим методом.

В данной работе [12-Leissa, A. W., 1973] предпринята попытка представить всесторонние и точные результаты анализа свободной вибрации прямоугольных пластин. Приведен двадцать один пример, в котором возможно сочетание условий зажатия, простой опоры и свободной кромки. Точные характеристические уравнения приведены для шести случаев, когда две противоположные стороны просто поддерживаются. Существование решений различных характеристических уравнений тщательно описано. Используется метод Ритца с 36 членами, содержащими произведения лучевых функций на проанализируйте оставшиеся 15 случаев. Представлены точные частотные параметры для диапазона соотношений сторон ( $a/b = 0:4, 2/3, 1:0, 1:5, \text{ и } 2:5$ ) для каждого случая. Для последних 15 случаев были проведены сравнения с использованием полезных приближенных формул Уорбертона.

Сбору теоретических оценок, позволяющих рассчитать частоту колебаний прямоугольных изотропных пластин, подверженных различным граничным условиям посвящена работа [13-[R. F. S. Hearmon](#)].

В работе [14-Морозов Н.А., Гребенюк Г.И., Максак В.И., Гаврилов А.А.] исследованы собственные колебания прямоугольных металлических пластин с различными граничными. Применены аналитические методы, метод конечных элементов и экспериментальные исследования. Выявлены расхождения в частотах колебаний в зависимости от метода и граничных условий.

Автор работы [15- Алгазин С.Д.] решил опубликовать работу по вычислению собственных частот прямоугольной пластины, во-первых, из-за её важности, во-вторых из-за того, что работы по вычислению частот прямоугольной пластины продолжают появляться в литературе. Вместе с тем в 2003 году автор опубликовал работу о флаттере прямоугольной пластины (Наука, ПМТФ, Т. 44, №4, 2003, с.35-42), где как промежуточный результат вычислялись собственные значения бигармонического оператора в прямоугольнике, т.е. собственные частоты защемлённой прямоугольной пластины. В настоящем препринте приводится обзор по работам о вычислении частот свободных колебаний прямоугольной пластины и программа для их вычисления.

В работе [16- Нестеров С.В] построены аналитические выражения для вычисления собственных частот и форм изгибных колебаний защемленной по контуру квадратной однородной пластины. Дана оценка погрешности сравнением с известными высокоточными расчетами. Произведено также сравнение аналитических расчетов с экспериментальными данными, полученными автором резонансным методом. Установлено, что аналитические и соответственно численные результаты совпадают с экспериментальными с погрешностью менее 1%. Высокоточное определение собственных частот требуется при создании современных прецизионных электромеханических преобразователей и анализа качества их функционирования. Предложенная методика исследований и алгоритм расчета могут быть использованы для исследования изгибных колебаний пластин при других типах граничных условий

Пособие [17- Мондрус В.Л., Ковальчук О.А ] включает три раздела, в которых рассматриваются основные методы определения частот свободных колебаний прямоугольных пластинок. Приведены примеры расчетов.

В статье [18-Cornel Hatiegan,] представлено дифференциальное бигармоническое уравнение тонких пластин, с помощью которого были получены формы колебаний для прямоугольной тонкой пластины, шарнирно просто закрепленной по контуру. Кроме того, были получены первые четыре режима вибрации и первые четыре собственные частоты этой прямоугольной тонкой стальной пластины. С помощью программного обеспечения MATLAB были графически представлены формы режимов вибрации.

На следующих четырех работах были вычислены не сами собственные частоты, а её параметр.

Например, в статье [19- Вyoung Kee Han, Kang Chung and Dae Sik Han] представлен анализ колебаний пластин методом Рэлея-Ритца с использованием ортогональных многочленов. Разработана компьютерная программа, и численные результаты вычислений хорошо согласуются с результатами, полученными другими авторами.

Исследование колебаний прямоугольных пластин с различными комбинациями граничных условий, которые включают свободные края, проводится в работе [20- К. М. Liew, К. Y.

Lam and S. T. Chow] с использованием ортогональной функции пластины в процедуре Рэлея-Ритца. Функция ортогональной пластины построена с использованием соотношения ортогональности Грама-Шмидта. Вычисленные собственные частоты были проверены путем сравнения с результатами анализа, опубликованными в открытой литературе, и оказались в очень хорошем соответствии.

В работе проведено [21- Neffati M. Werfalli, Abobaker A. Karoud] исследование свободных колебаний тонких изотропных прямоугольных пластин с различными краевыми условиями. Это исследование включает в себя получение собственных частот путем решения математической модели с использованием метода конечных элементов, основанного на методе Галеркина. Эффективность метода точного вычисления собственных частот очень высокая, которая продемонстрировано путем сравнения полученного решения с существующими аналитическими результатами.

Собственные частоты прямоугольных пластин в работе [22- R. V. Bhat.] определяются с использованием набора ортогональных полиномов, характерных для балок, в методе Рэлея-Ритца. Эти ортогональные полиномы генерируются с помощью процесса Грама-Шмидта после того, как первый член строится таким образом, чтобы удовлетворять всем граничным условиям соответствующей задачи для балок, связанной с задачей для пластин. Собственные частоты, полученные с использованием ортогональных полиномиальных функций, сравниваются с частотами, найденными другими методами. Данный метод дает превосходные результаты для низших мод.

Таким образом, анализ колебаний пластин остается актуальной междисциплинарной задачей, требующей комплексного подхода и учитывающей специфику конкретного применения.

В данной работе рассматривается изотропная пластина толщины  $h$ , длины  $a$  и ширины  $b$ . Целью является вывод аналитического решения для частот и форм колебаний с использованием метода разделения переменных и верификация полученных результатов предлагаемым в данной статье графико-численным методом определения собственных частот колебаний.

**2. Методы (Methods).** Рассмотрим аналитическое решение задачи о свободных колебаниях прямоугольной изотропной пластины, у которой все стороны шарнирно оперты. Уравнение Софи Жермен–Лагранжа для изгибных колебаний изотропной пластины имеет вид:

$$D\nabla^4 w(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  – цилиндрическая жесткость пластины,  $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$  –

бигармонический оператор,  $\rho$  – плотность материала пластины,  $h$  – толщина пластины,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $w(x, y, t)$  – прогиб пластины.

Решение уравнение (1) ищем в виде произведения пространственных и временных функций:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_{mn}(x, y) \cdot T_{mn}(t), \quad (2)$$

где  $w_{mn}(x, y)$  – собственные формы колебаний, удовлетворяющие заданным граничным условиям.

Подставляя (2) в уравнение (1), получим:

$$D\nabla^4 w \cdot T + \rho h w \cdot \ddot{T} = 0. \quad (3)$$

Разделяя переменные в уравнении (3), получим:

$$\frac{D\nabla^4 w}{\rho h w} = -\frac{\ddot{T}}{T} = \omega^2, \quad (4)$$

где  $\omega$  – собственная частота колебаний пластины.

Таким образом, из (4) получаем следующие два уравнения:

1. Уравнение с пространственными переменными:

$$\nabla^4 w - k^4 w = 0, \quad k^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D}. \quad (5)$$

Здесь бигармонический оператор  $\nabla^4$  легко представляется через квадрат лапласиана:

$$\nabla^4 = (\nabla^2)^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2.$$

2. Уравнение с временным переменным:

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0. \quad (6)$$

Теперь приступаем к решению уравнений (5). Для прямоугольной пластины, у которой все стороны шарнирно оперты граничные условия выглядят так:

$$W(0, y) = W(a, y) = W(x, 0) = W(x, b) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right|_{x=0,a} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right|_{y=0,b} = 0. \quad (7)$$

Собственные формы колебаний, удовлетворяющие заданным граничным условиям (7) выбираем в виде:

$$w_{mn}(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \quad (8)$$

Подставив (8) в уравнение (5), получим:

$$\left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2 W = k^4 W. \quad (9)$$

Из равенства (9) получим соотношения для связи частоты и волновых чисел:

$$k^4 = \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2. \quad (10)$$

Учитывая в равенстве (10) обозначение для  $k^4$  находим формулу по определению собственных частот пластины:

$$\omega_{mn} = \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}. \quad (11)$$

Решение уравнений с временным переменным (6) имеет вид:

$$T_{mn}(t) = A_{mn} \cos(\omega_{mn} t) + B_{mn} \sin(\omega_{mn} t). \quad (12)$$

Подставив (8) и (10) в (2) получим общее решение для прогиба пластины:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) [A_{mn} \cos(\omega_{mn} t) + B_{mn} \sin(\omega_{mn} t)]. \quad (13)$$

Коэффициенты  $A_{mn}$  и  $B_{mn}$  в (13) находятся из начальных условий:

$$\text{при } t=0: \quad w(x, y, 0) = \sum_{mn} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right),$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{mn} B_{mn} \omega_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Следуя методу Бубнова-Галеркина умножаем обе части на  $\sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right)$  и интегрируя по  $x \in [0, a]$ ,  $y \in [0, b]$ , используя ортогональность синусов, получаем:

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b w(x, y, 0) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy,$$

$$B_{mn} = \frac{4}{ab\omega_{mn}} \int_0^a \int_0^b \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy,$$

Таким образом, получаем выражение для частот:

$$\omega_{mn} = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}}.$$

Для квадратной пластины ( $a = b$ ) низшая частота:

$$\omega_{11} = 2\pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h a^4}}.$$

Учитывая, что  $\omega_{mn} = 2\pi f_{mn}$ , собственные частоты прямоугольной пластины могут быть вычислены по следующему уравнению:

$$f_{mn} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$$

Обозначим первые шесть собственных частот (мод) для комбинаций следующим образом:  $(m, n) = (1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3)$ .

Формы колебаний (моды) выглядит так:

$$W_{mn}(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Это решение полностью описывает свободные колебания пластины с граничными условиями шарнирного оперения. Для практических приложений и инженерных расчетов обычно учитывают только первые несколько форм колебаний, так как они дают основной вклад в колебательный процесс пластины.

Рассмотрим в качестве примера колебания квадратной изотропной пластины с шарнирно опертыми краями. Предположим, что дана квадратная изотропная стальная пластина, у которой длина и ширина соответственно равны  $a = b = 1$  м, толщина  $h = 0.01$  м, модуль

Юнга  $E = 2 \times 10^{11}$  Па, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$  и плотность материала пластины  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>.

Требуется определение первой собственной частоты колебаний  $\omega_{11}$ , а также написать форму первой моды  $w_{11}(x, y)$  и решить уравнение для  $T(t)$  при нулевой начальной скорости. В первую очередь вычислим цилиндрическую жесткость  $D$ :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{2 \times 10^{11} \times (0.01)^3}{12(1-0.3^2)} = \frac{2 \times 10^{11} \times 10^{-6}}{12 \times 0.91} \approx 18315.01832.$$

Далее определим первую собственную частоту  $f_{11}$ . Для моды ( $m = 1, n = 1$ ):

$$f_{11} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1^2}{a^2} + \frac{1^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}}. \quad (14)$$

Подставляя в (14) линейные размеры  $a = b = 1$  м, получим:

$$\begin{aligned} f_{11} &= \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = \pi \sqrt{\frac{D}{\rho h}}. \\ f_{11} &= \pi \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = 3.141592 \sqrt{\frac{18315.01832}{7800 \cdot 0.01}} = 3.141592 \sqrt{\frac{18315.01832}{78}} = \\ &= 3.141592 \cdot \sqrt{234.8079271} = 3.141592 \cdot 15.32344371 = 48.14001819 \text{ Гц} \end{aligned}$$

Выражения для формы первой моды  $w_{11}(x, y)$  имеет вид:

$$w_{11}(x, y) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) = \sin(\pi x) \sin(\pi y).$$

График формы колебаний представляет собой полуволну с максимумом в центре ( $x = y = 0.5$  м) пластины.

Общее решение уравнений с временным параметром (6) выглядит так:

$$T(t) = C_1 \cos(\omega_{11}t) + C_2 \sin(\omega_{11}t).$$

пусть при  $t = 0$ :  $w(x, y, 0) = 0.01 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$  (начальное отклонение),

$$\left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \text{ (нулевая начальная скорость).}$$

Тогда  $T(0) = C_1 = 0.01$ ,  $\dot{T}(0) = C_2 \omega_{11} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$ .

Решение для  $T(t)$ :

$$T(t) = 0.01 \cos(95.7t).$$

Таким образом получим итоговое решение для прогиба пластины  $w(x, y, t)$ :

$$w(x, y, t) = 0.01 \sin(\pi x) \sin(\pi y) \cos(95.7t).$$

Отсюда можно сделать вывод, что рассматриваемая изотропная квадратная пластина с заданными выше исходными данными колеблется с частотой 48.14 Гц, а амплитуда в центре равна 0.01 м.

Теперь переходим к изложению сути и содержания графико-численного метода определения собственных частот колебаний пластины, предлагаемы в данной работы, который дополняет классическое аналитическое решение, основанное на теории Кирхгофа-Лява. Хотя аналитический подход позволяет точно определить собственные

частоты и формы колебаний для пластины с шарнирно опертыми краями, предлагаемый метод расширяет возможности анализа, особенно для случаев со сложными граничными условиями.

Метод, описываемый ниже опирается на фундаментальное понятие как частоты колебаний в одну секунду и является практическим способом определения частоты колебаний, опираясь на её временное представление и определение количества полных и частичных циклов колебаний в единицу времени.

Суть метода заключается в определении собственных частот по графическому представлению колебательного процесса - зависимости амплитуды колебаний от времени. Для демонстрации его работоспособности рассмотрим задачу о свободных колебаниях квадратной пластины, решение которой было получено аналитически. Верификация результатов проводится путём сопоставления значений основной частоты, найденных обоими методами. Такой подход не только подтверждает корректность аналитического решения, но и открывает перспективы для исследования более сложных динамических систем, где применение классических методов затруднено.

Метод включает в себя следующие этапы:

1. Получение графических данных: график амплитуды колебаний во времени получается экспериментально или в результате численного моделирования; при необходимости графические данные переводятся в цифровой формат.
2. Определение периодов: на графике определяются полные периоды колебаний. Для этого находятся пики колебаний (максимальные и минимальные точки); на интервале времени в одну секунду, начиная с нулевой точки, определяется количество полных периодов колебаний.
3. Определение неполного периода: в конце секундного интервала времени определяется доля неполного периода; для этого используется метод пропорций: отношение временного интервала неполного периода к временному интервалу полного периода.
4. Расчет частоты: к количеству определенных полных периодов добавляется доля неполного периода; результат дает значение частоты колебаний в герцах, то есть количество колебаний в секунду.

Для разработки метода графико-численного определения собственных частот колебаний применим метод Бубнова-Галеркина к решению уравнений движения (1), с граничными условиями (7) и следующими начальными условиями:

при  $t = 0$ ,

$$w(x, y, 0) = w_0(x, y), \quad \dot{w}(x, y, 0) = \dot{w}_0(x, y) \quad (12)$$

Решение ищем в виде:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_{mn}(t) X_m(x) Y_n(y) \quad (13)$$

(13) подставим в (1), тогда получим:

$$\begin{aligned} D \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_{mn}(t) \left[ \frac{d^4 X_m(x)}{dx^4} Y_n(y) + 2 \frac{d^2 X_m(x)}{dx^2} \frac{d^2 Y_n(y)}{dy^2} + X_m(x) \frac{d^4 Y_n(y)}{dy^4} \right] = \\ = -\rho h \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \ddot{w}_{mn}(t) X_m(x) Y_n(y) \end{aligned} \quad (14)$$

Умножим обе части на  $X_k(x)Y_l(y)$  и проинтегрируем по переменным  $x$  и  $y$ , согласно методу Бубнова-Галеркина

$$D \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_{mn}(t) \left[ \int_0^a \frac{d^4 X_m(x)}{dx^4} X_k(x) dx \int_0^b Y_n(y) Y_l(y) dy + \right. \\ \left. + 2 \int_0^a \frac{d^2 X_m(x)}{dx^2} X_k(x) dx \int_0^b \frac{d^2 Y_n(y)}{dy^2} Y_l(y) dy + \int_0^a X_m(x) X_k(x) dx \int_0^b \frac{d^4 Y_n(y)}{dy^4} Y_l(y) dy \right] = \\ = -\rho h \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \ddot{w}_{mn}(t) \int_0^a X_m(x) X_k(x) dx \int_0^b Y_n(y) Y_l(y) dy \quad (15)$$

Введем обозначения:

$$M_{1klmn} = \int_0^a \frac{d^4 X_m(x)}{dx^4} X_k(x) dx \int_0^b Y_n(y) Y_l(y) dy; \\ M_{2klmn} = \int_0^a \frac{d^2 X_m(x)}{dx^2} X_k(x) dx \int_0^b \frac{d^2 Y_n(y)}{dy^2} Y_l(y) dy; \\ M_{3klmn} = \int_0^a X_m(x) X_k(x) dx \int_0^b \frac{d^4 Y_n(y)}{dy^4} Y_l(y) dy; \\ M_{4klmn} = \int_0^a X_m(x) X_k(x) dx \int_0^b Y_n(y) Y_l(y) dy.$$

С учетом обозначений система уравнений (15) примет вид

$$D \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (M_{1klmn} + 2M_{2klmn} + M_{3klmn}) w_{mn}(t) = -\rho h \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N M_{4klmn} \ddot{w}_{mn}(t) \quad (16)$$

Проинтегрируем (16) два раза по времени и получим:

$$\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N M_{4klmn} w_{mn}(t_i) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N M_{4klmn} (w_{0mn} + \dot{w}_{0mn} \cdot t_i) - \\ - \frac{D}{\rho h} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (M_{1klmn} + 2M_{2klmn} + M_{3klmn}) \sum_{i=0}^{I-1} A_i(t_i - t_i) w_{mn}(t_i) \quad (17)$$

Для пластины, у которой все стороны шарнирно-оперты, функции, удовлетворяющие данным условиям, выбираются в виде:

$$X_m(x) = \sin \frac{m\pi x}{a}; \quad Y_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{b}$$

В рамках разработанной методологии мы сознательно останавливаемся на промежуточном этапе аналитического решения, что позволяет сохранить ценные физические характеристики задачи и одновременно перейти к эффективной визуализации.

Далее, разработан вычислительный алгоритм для нахождения  $w_{mn}(t)$  и реализован на алгоритмическом языке Delphi.

Следуя вышеприведенным этапам предлагаемого графико-численного метода определения собственной частоты получены численное значение основной частоты колебаний, которая выводятся в окно графика (рис.2).

Таким образом рассматриваемая изотропная пластина колеблется с частотой 48,14 Гц. Как мы видим этот результат совпадает с результатами, полученным аналитическим путем до

трёх значений после запятой. Из рис нетрудно видит и сопоставить результаты, получаемые аналитическим путем и по предлагаемым методом графико-численного определения частоты колебаний.

Работа [1] посвящена исследованию методом конечных элементов (МКЭ) колебаний прямоугольной пластин. Определены первые шесть характерных собственных частот свободных колебаний и соответствующие форм колебаний для пластин, у которой все стороны шарнирно-оперты. Результаты сверяются с работами Рама [2] и точными аналитическими решениями.

max M 5 max N 5 Время 10000 Шаг 0,0001 По x 10 По y 10

Число графиков 1

№	a	b	h	rho	M	N	Границ	E	nu	alpha	beta	gamma
1	1	1	0,01	7800	1	1	1	20000000000	0,3	0,5	0,5	0,01

№	alpha	beta	gamma
1	0,0	0,25	0,05

epsilon 1 0,001  
epsilon 2 0,001

Расчет  
Графики  
Выход

Рис.1. Исходные данные



Рис.1. Расчет частоты собственных колебаний пластины.

Данные МКЭ хорошо согласуются и подтверждает корректность метода для пластин разной толщины. Такие исследования важны в инженерии (авиация, строительство) для расчёта устойчивости конструкций к вибрациям. Например, чтобы избежать резонанса у крыла самолёта или перекрытий зданий.

В таблицах 1–2 демонстрируют первые шесть собственных частот прямоугольной пластины. Эти результаты практически совпадают с данными Раму [1, 2] и аналитическими решениями для пластин различной толщины.

Таблица 1.

**Сравнение параметров собственной частоты с аналитическим решением и данными Ramu [1], Ganesh [2] для шарнирно опёртой прямоугольной пластины толщиной 6.25 мм**

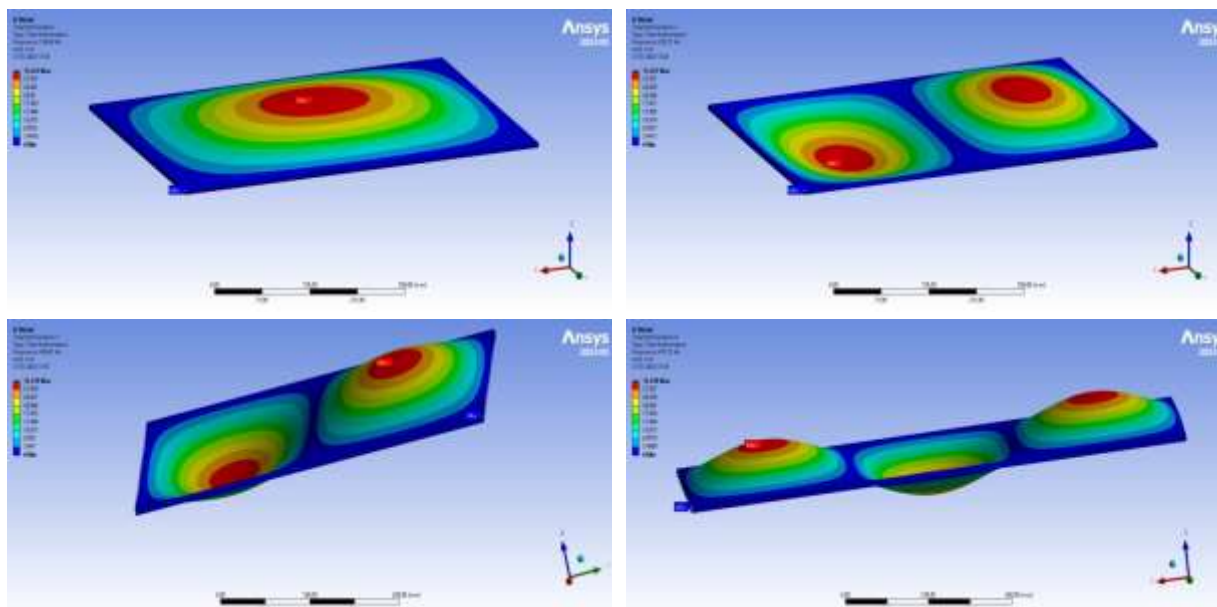
Результаты	Номер моды (m, n)					
	1 (1,1)	2 (2,1)	3 (1,2)	4 (3,1)	5 (2,2)	6 (3,2)
Аналитическое	136.56	262.75	420.41	472.96	546.33	756.73
Ramu [1]	135.8	259.9	417.6	466.8	535.9	733.7
Ganesh [2]	136.92	263.27	422.27	474.53	547.86	758.07
ГЧМ	136,60	262,92	421,42	474,49	548,98	763,68

Используя пакет ANSYS получены значения собственных частот и форм колебаний для прямоугольной пластины при различных значениях толщины пластины.

Таблица 2

**Собственные частоты колебаний прямоугольной пластины при  $h = 6.25$  мм**

1	2	3	4	5	6
136.48	262.31	419.41	471.72	544.92	753.8



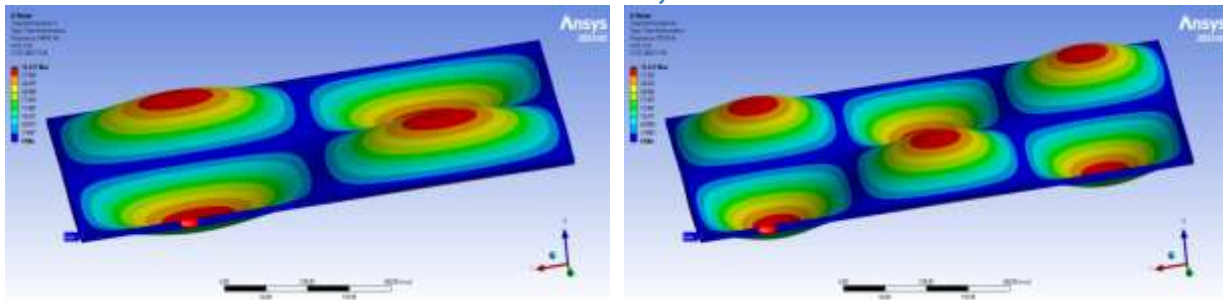


Таблица 3.

Сравнение параметров собственной частоты с аналитическим решением и данными Ramu [1], Ganesh [2] для шарнирно опёртой прямоугольной пластины толщиной 12.5 мм

Результаты	Номер моды					
	1 (1,1)	2 (2,1)	3 (1,2)	4 (3,1)	5 (2,2)	6 (3,2)
Аналитическое	273.12	525.51	840.82	945.92	1093.06	1513.48
Ramu [1]	271.7	519.8	835.2	933.7	1071.9	1467.5
Ganesh [2]	272.17	522.27	833.59	940.3	1083.3	1493.7
ГЧМ	273,45	527,68	850,43	959,95	115,16	1576,28

Таблица 4

Сравнение параметров собственной частоты с аналитическим решением и данными RF-DYNAM Pro [Nkounhawa, P.K., Ndapeu, D., Kenmeugne, B. and Began] для шарнирно опёртой прямоугольной пластины толщиной 0,010 м

Результаты	Номер моды					
	1 (1,1)	2 (1,2)	3 (2,1)	4 (3,1)	5 (2,2)	6 (3,2)
Аналитическое	34,344	66,046	105,673	118,882	137,375	190,212
RF-DYNAM Pro	35,513	68,293	109,268	122,927	142,049	196,684
ГЧМ	35,514	68,299	109,269	122,959	142,096	196,806

Колебания

max M  max N  Время  Шаг  По x  По y

Число графиков

Nº	a	b	h	ro	M	N	Гран.усл.	E	пух	x	y	w начал
1	1	1,5	0,01	7850	3	3	1	210000000000	0,3	0,5	0,75	0,01

Nº	A	alf	beta
1	0,0	0,25	0,05

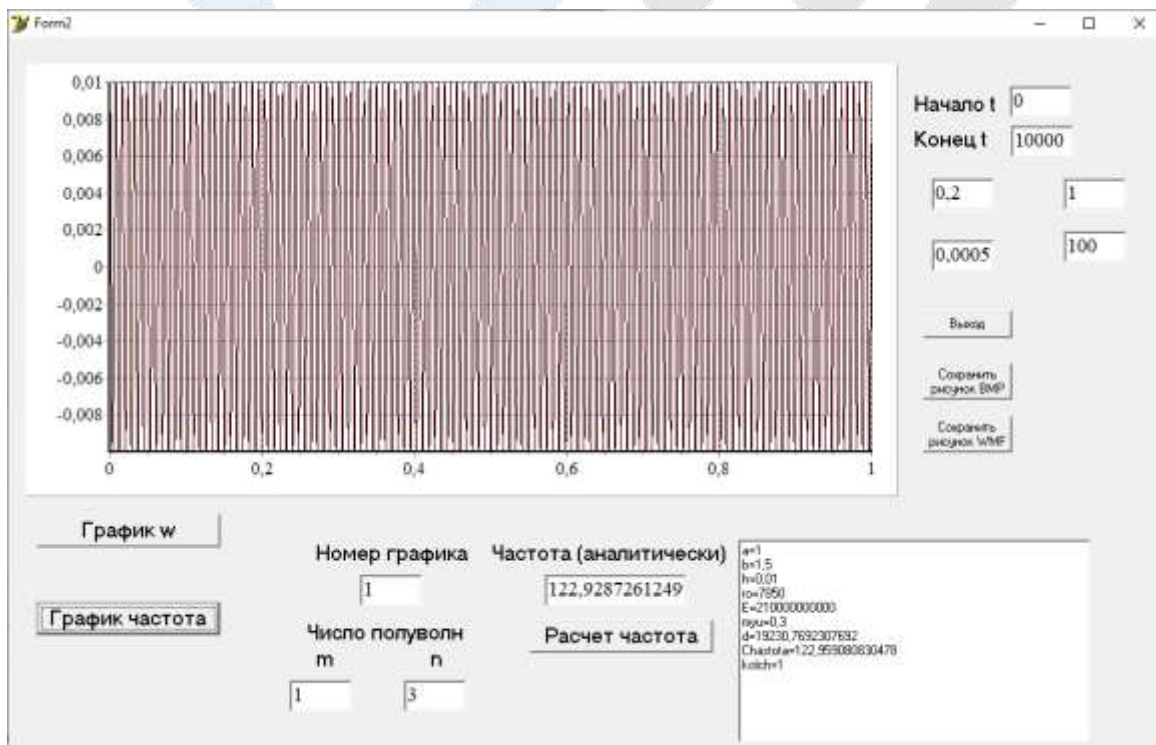
ε1

ε2

Расчет

Графики

Выход



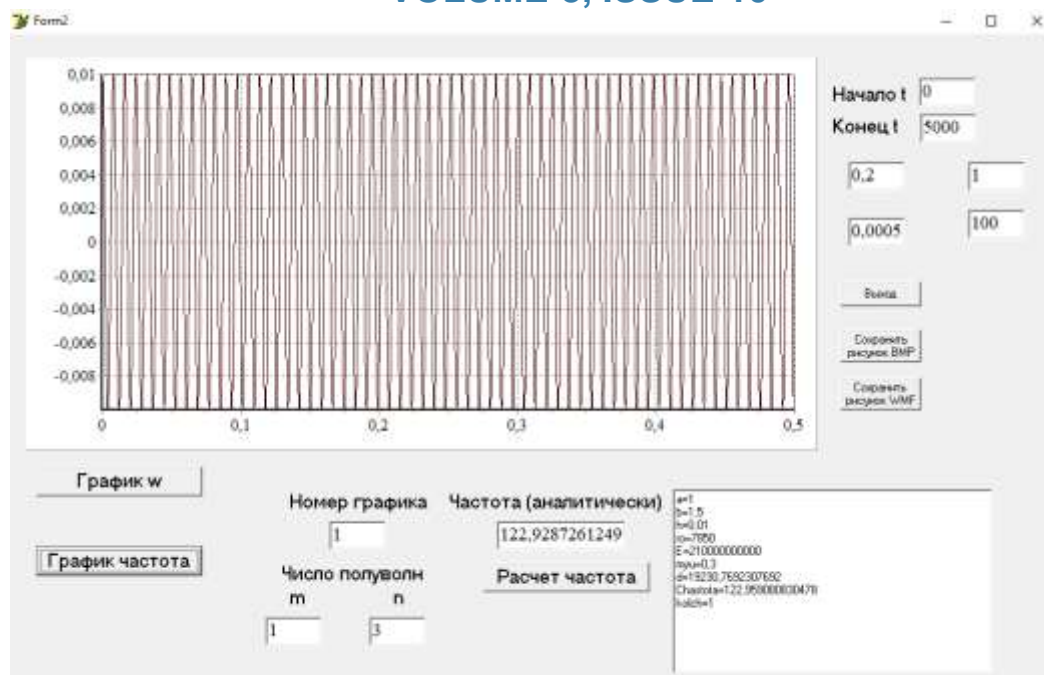


Таблица 5

Сравнение параметров собственной частоты с аналитическим решением и данными Nkounhawa [4] для шарнирно опёртой прямоугольной пластины толщиной 0,020 м

Результаты	Номер моды				
	1 (1,1)	4 (1,2)	5 (2,2)	11 (3,1)	12 (3,3)
Nkounhawa [4]	95,97	239,93	383,89	623,82	863,75
ГЧМ	95,98	240,14	384,84	627,87	874,69

В данной работе проведён численный анализ свободных колебаний тонкой прямоугольной сплошной пластины с использованием, представляемым авторами графико-численного метода определения собственных частот колебаний при шарнирном закреплении и варьировании толщины. Установлено, что полученные значения собственных частот близки к данным из литературы. Однако при увеличении толщины пластины расхождения с аналитическими решениями становятся более значительными.

Анализ полученных результатов показывает, что для тонких пластин (6,25 мм) результаты ГЧМ почти совпадают с аналитикой и литературными данными, а для относительно более толстых пластин 12,5 мм погрешность ГЧМ растёт, что связано с не идеальностью модели пластины. Такие расчёты критичны для проектирования конструкций, где важно избегать резонансных частот, например, в авиации или строительстве.

В таблице 6 приводятся сравнительный анализ круговых и собственных частот, полученные в работе [18] с предлагаемым графико-численным методом.

Для прямоугольной пластины из стали с краями  $a=1000$  мм и  $b=500$  мм, с модулем Юнга:  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>, коэффициентом Пуассона  $\nu = 0,3$  и плотностью  $\rho = 7850$  кг/м<sup>3</sup>. Первые четыре формы колебаний и собственные частоты рассчитаны в таблице 1. Полученные значения согласуются с данными из [3], где  $n$  и  $m$  — номера мод:

Таблица 6

Сравнительный анализ круговых и собственных частот, полученные в работе [18] с предлагаемым графико-численным методом

n	Источ ник	Круговая частота (рад/с)				Собственная частота (Гц)			
		m=1	m=2	m=3	m=4	m=1	m=2	m=3	m=4
1	[18]	149,607	239,372	388,979	598,43	23,822	38,116	61,939	95,291
	ГЧМ	149,607	239,496	389,193	598,794	23,822	38,117	61,942	95,301
2	[18]	508,665	598,430	748,037	957,487	80,997	95,291	119,114	152,466
	ГЧМ	508,950	598,794	748,598	958,305	81,002	95,301	119,143	152,519
3	[18]	1107,09	1196,86	1346,47	1555,92	176,288	190,582	214,406	247,758
	ГЧМ	1108,24	1198,11	1348,11	1558,34	176,381	190,686	214,558	248,017
4	[18]	1944,90	2034,66	2184,27	2393,72	309,697	323,990	347,813	381,165
	ГЧМ	1948,94	2039,22	2189,76	2400,64	310,183	324,552	348,511	382,073

С помощью MATLAB были получены формы колебаний прямоугольной пластины, свободно опертой по краям, которые представлены на рисунках. Как видно из таблицы, результаты для низших собственных частот, рассчитанные разными методами, практически совпадают. Это свидетельствует о корректности применяемых подходов.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ (Conclusion).** Особенности метода: метод объединяет визуальный анализ колебательного процесса и численные расчеты; предлагает простой и понятный способ определения частоты колебаний и метод может применяться для анализа колебаний в различных областях. К преимуществам данного метода можно отнести, наглядность колебательного процесса, и быстроту получения результатов. К недостаткам можно отнести зависимость от точности графика.

1. Как мы видим разработанный подход успешно применён для анализа колебаний изотропных пластин с шарнирным закреплением по контуру.

Полученные результаты демонстрируют: высокую точность определения собственных частот; полное соответствие классическим аналитическим решениям; эффективность численной реализации метода.

2. Особый интерес представляет распространение метода графико-численного определения собственных частот колебаний на случай вязкоупругих пластин с ядром релаксации Колтунова-Ржаницына.

Предлагаемый подход открывает новые возможности для анализа динамики вязкоупругих систем, где классические методы оказываются неработоспособными, а синтез аналитических и графических методов открывает новые возможности в решении прикладных задач динамики вязкоупругих конструкций, сочетая строгость математического подхода с наглядностью инженерного анализа.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Бабаков, И. М. Теория колебаний: учеб. пособие / И. М. Бабаков. 4-е изд., испр. - М.: Дрофа, 2004. - 591, [1] с.: 130 ил., 15 табл.
2. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле / Пер. с англ. Л. Г. Корнейчука; под ред. Э. И. Григолюка. - М.: Машиностроение, 1985. - 472 с.
3. Leissa A. W. Vibration of plates. Washington: Scientific and Technical Information Division Office of Technology Utilisation National Aeronautics and Space Administration, 1969. 353 p.4.
4. Gorman Daniel J. Free Vibration Analysis of Rectangular Plates. Elsevier North Holland, In., 1982. - 324 p.
5. Mindlin R. D. An Introduction to the Mathematical Theory of Vibrations of Elastic Plates. 2006 by World Scientific Publishing Co., 190 p.

6. Chakravarty S. Vibration of PLATES. 2009 by Taylor & Francis Group, 411 p.
7. Werner Soedel. Vibration of Shells and Plates. 2004 by Marcel Dekker, 553 p.
8. J. N. Reddy, Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells, 2nd ed., CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, FL, 2007, 568 pp.
9. Ganesh Naik Guguloth, Baij Nath Singh, Vinayak Ranjan. Free vibration analysis of simply supported rectangular plates November 2019 [Vibroengineering Procedia](#) 29(4): p. 270-273.
10. Ramu I., Mohanty S. C. Study on free vibration analysis of rectangular plate structures using finite element method. *Procedia Engineering*, Vol. 38, 2012, p. 2758-2766.
11. Nkounhawa, P.K., Ndapeu, D., Kenmeugne, B. and Began, The. (2020) Analysis of the Behavior of a Square Plate in Free Vibration by FEM in Ansys. *World Journal of Mechanics*, 10, 11-25. <https://doi.org/10.4236/wjm.2020.102002/>
12. Leissa, A. W., 1973, The Free Vibration of Rectangular Plates // *J. Sound Vib.*, 31, pp. 257-293
13. [R. F. S. Hearmon](#). The Frequency of Vibration of Rectangular Isotropic Plates / *J. Appl. Mech. Sep 1952, 19(3): 402-403 (2 pages)*.
14. Морозов Н.А., Гребенюк Г.И., Максак В.И., Гаврилов А.А. Исследования собственных колебаний прямоугольных пластин // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2023. Т. 25. № 3. С. 96-111. DOI: 10.31675/1607-1859-2023-25-3-96-111. EDN: IBTUVQ.
15. Алгазин С.Д. Свободные колебания прямоугольной пластины // Внедрение современных конструкций и передовых технологий в путевое хозяйство, 2016 г., Том 9, номер 9 (9), стр. 130-137.
16. Нестеров С.В. Изгибные колебания квадратной пластины, защемленной по контуру // Известия Российской Академии Наук. Механика твердого тела, 2011 г., номер 6, стр.159-165.
17. Мондрус В.Л., Ковальчук О.А. Определение частот свободных колебаний прямоугольных пластинок. Учебное пособие, Москва, 2010 г. – 24 стр.
18. Cornel Hatiegan, Gilbert-Rainer Gillich, Eugen Răduca, Marian-Dumitru Nedeloni, Lenuța Cîndea. Equation of Motion and Determining the Vibration Mode Shapes of a Rectangular Thin Plate Simply Supported on Contour Using MATLAB, *Analele universității "EFTİMIE MURGU" RESIȚA ANUL XX, NR. 1, 2013*.
19. Byoung Kee Han, Kang Chung and Dae Sik Han. Vibration analysis on plates by orthogonal polynomials. *KSME Journal*, Vol. 3, No. 2, pp. 95~102, 1989.
20. K. M. Liew, K. Y. Lam and S. T. Chow. Free vibration analysis of rectangular plates using orthogonal plate function. *Computers & Structures* Vol. 34, No. 1, pp. 79-85, 1990
21. Neffati M. Werfalli, Abobaker A. Karoud. Free Vibration Analysis of Rectangular Plates Using Galerkin-Based Finite Element Method. *International Journal of Mechanical Engineering*, Volume 2, Issue 2, 59-67 pp.
22. R. B. Bhat. Natural frequencies of rectangular plates using characteristic orthogonal polynomials in Rayleigh-Ritz method. *Journal of Sound and Vibration* (1985) 102(4), 493-499.